УДК 621.372.1:537.52

ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА И ЕМКОСТЕЙ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОДОВ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Ю.Н. Исаев, О.П. Шпильная, Е.О. Кулешова

Томский политехнический университет
E-mail: Isaev_Yusup@mail.ru

Предлагается использовать метод реконструктивной томографии для расчета распределения зарядов и емкостей плоских проводников неканонической формы. Приводятся примеры восстановления распределения зарядов и ёмкостей на модельных задачах. Сравниваются результаты известных расчетов ёмкостей с томографическим подходом.

В реальных электротехнических устройствах происходят сложные процессы, связанные с накоплением, перераспределением энергии, протеканием токов смещения, проводимости. Поэтому при проектировании линий электропередач, кабелей, различных электрических и радиотехнических устройств возникает необходимость расчета электрической емкости.

Известно, что емкость зависит только от геометрических параметров проводников и диэлектрической проницаемости окружающей среды. В научно-технической литературе достаточно подробно рассмотрены основные методы расчета емкости для проводников канонической формы, существует справочная литература по расчету емкостей [1], содержащая примеры расчета, готовые формулы, таблицы, численные результаты для проводников канонической формы. Для проводников более сложной формы в работах [1–3] применяют специальные методы, дающие приближенные результаты.

Как альтернативу существующим методам расчета емкостей плоских проводников авторы предлагают метод компьютерной томографии, претендующий на высокую точность расчетов даже для проводников сколь угодно сложной конфигурации.

Идея компьютерной томографии состоит в восстановлении (реконструкции) функции двух переменных $\sigma(x,y)$ (распределения заряда) по их интегральным характеристикам – проекциям $P(x,y)$, полученным в результате измерений вне объекта [4–6].

$$P(p,\theta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma(x,y)\cdot\delta(p-y\cdot\cos(\theta)+x\cdot\sin(\theta))dxdy, \quad (1)$$

где $\delta(x,y)$ – фильтрующая дельта-функция Дирака.

Решив ур. (1) относительно $\sigma(x,y)$, получаем формулу, позволяющую восстанавливать распределения зарядов по проекциям:

$$\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{0}^{2\pi}d\theta\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp\cdot\frac{\partial P(\theta,p)/\partial p}{p-y\cdot\cos(\theta)+x\cdot\sin(\theta)}. \quad (2)$$

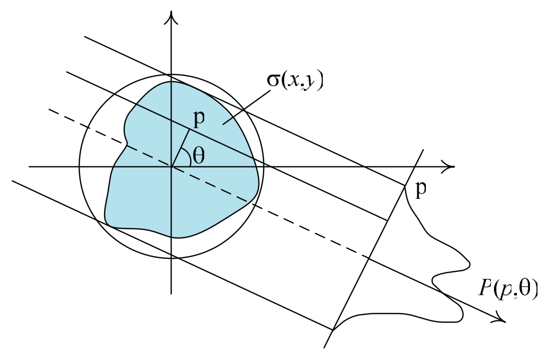


Рис. 1. *Получение проекции $P(p,\theta)$ при фиксированных значениях p и θ для распределения зарядов $\sigma(x,y)$ на поверхности проводника*

Интеграл (2) существует в смысле главного значения [4, 6]. Смысл переменных в формулах (1) и (2) ясен из рис. 1. В электростатическом поле потенциал $U(x,y)$ проводника в любой его точке одинаков, заряд же распределен по поверхности неравномерно $\sigma(x,y)$. Поэтому основной задачей при определении емкости является определение распределения зарядов по поверхности проводника при заданном потенциале проводника. Чтобы получить связь между зарядом проводника и потенциалом на его поверхности необходимо осуществить обратное проецирование. Суть обратного проецирования в следующем. Проекция $P(p,\theta)$ двумерной функции

$\sigma(x,y)$ является одномерной функцией для каждого значения угла θ. Если просуммировать исходный набор проекций $P(p,\theta)$ по углу θ для $0\prec\theta\prec 2\pi$, получим суммарное изображение:

$$U(\mathbf{r_0}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r}_0|}d\mathbf{r},\ \mathbf{r} = \{x, y\},\ \mathbf{r_0} = \{x_0, y_0\}. \quad (3)$$

Здесь

$$U(\mathbf{r}_0) = \int\limits_0^{2\pi} P(p,\theta)d\theta. \quad (4)$$

Соотношение (3) в томографии известно как обратное проецирование (*back projection*) [4, 6], оно показывает, что распределение потенциала на поверхности проводника есть низкочастотная версия распределения зарядов на поверхности проводника [4, 5].

Авторами работы разработан томографичекий пакет программ, позволяющий восстанавливать распределение зарядов по его проекциям, а также рассчитывать емкости плоских пластин произвольной конфигурации.

В качестве примера работы предлагаемого авторами алгоритма рассмотрим модельную задачу восстановления распределения зарядов плоского электрода произвольной конфигурации.

Сначала зададимся произвольным распределением зарядов $\sigma(x,y)$ на плоской пластине радиусом R=0,3 мм, порождаемым суперпозицией внешнего поля и поля, создаваемого самой пластиной, и определим проекции этого распределения. Это есть решение прямой задачи. Затем решим обратную задачу – по заданным проекциям восстановим распределения зарядов на поверхности электрода. При решении обратной задачи необходимо учитывать особенности решения обратных задач, т.к. такие задачи относятся к классу некорректных задач [6, 7] и очень чувствительны к шумам в исходных данных.

Пусть задано распределение зарядов на поверхности электродов:

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} Ex(x-0.1, y-0.1, 30)^6 + \\ \quad + Ex(x+0.1, y-0.1, 30)^6 - \\ \quad - Ex(x-.1, y+0.1, 30)^6,\ \mathbf{r}(x,y) \le R \\ 0,\ \mathbf{r}(x,y) > R \end{cases},$$

где $Ex(x,y,\alpha)=\exp(-(x^2+y^2)\alpha)$. Пространственный вид распределения зарядов $\sigma(x,y)$ приведён на рис. 2.

Число дискретизаций области распределения зарядов по осям x и y выбираем равными N=52. Число дискретизаций области проекций по углу θ и по параметру p выбираем равными соответственно N_θ=18, N_p=52. После использования дискретного аналога преобразование Радона – ур. (1), получаем распределение проекций изображения, рис. 3.

Теперь решим обратную задачу. Используя выражение (3), получаем распределение потенциала на поверхности пластины, вызванное внешним полем и полем, создаваемым самой пластиной. Решив интегральное ур. (3) путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений, находим

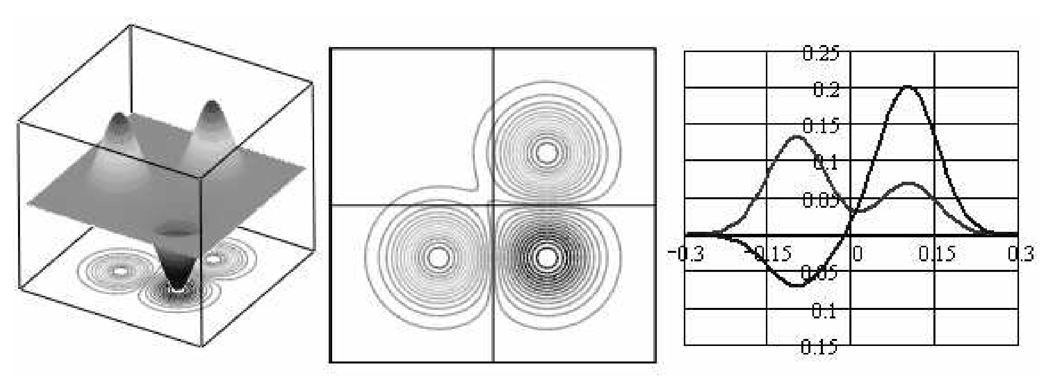


Рис. 2. *Пространственное распределение зарядов пластины $\sigma(x,y)$ и профили $\sigma(x,0)$ по оси x и $\sigma(0,y)$ по y соответственно*

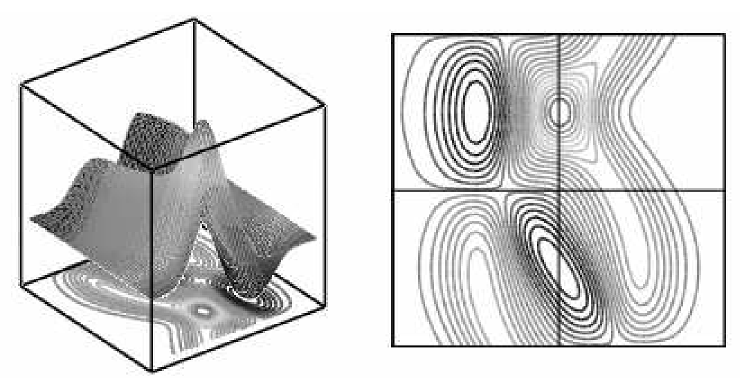


Рис. 3. *Пространственное распределение проекций $P(p,\theta)$*

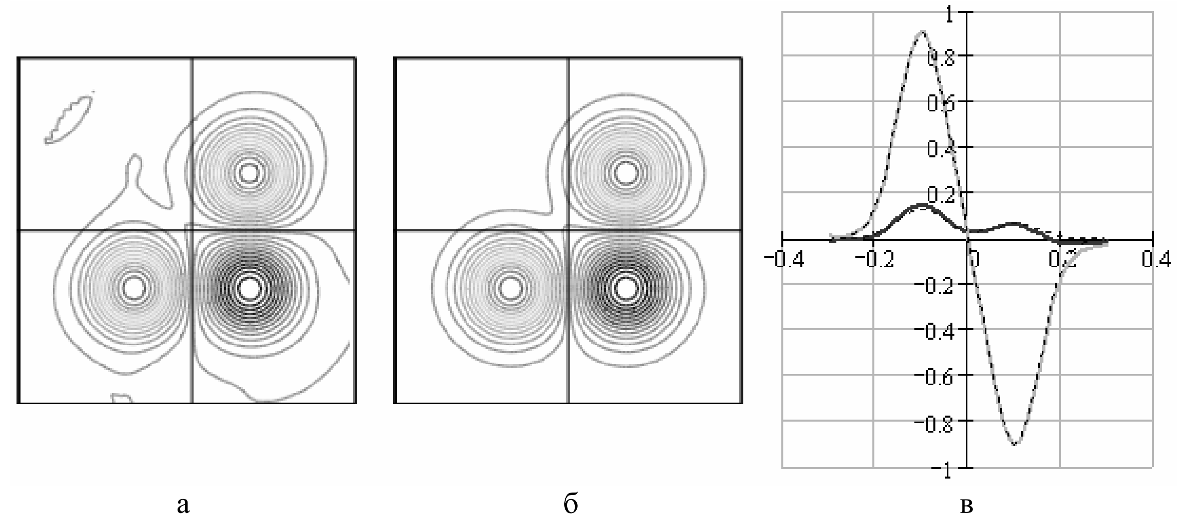


Рис. 4. Результат реконструкции распределения зарядов: а) восстановленное распределение, б) модельное распределение, в) пунктирные линии – модельные профили, сплошные – восстановленные

$$\sigma(x,y)\to\sigma=\{\sigma_1=\sigma(\mathbf{r}_1),\sigma_2=$$
$$=\sigma(\mathbf{r}_2),\sigma_3=\sigma(\mathbf{r}_3),...,\sigma_N=\sigma(\mathbf{r}_N)\}: \quad (5)$$
$$\sigma=4\pi\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{U}_0,$$

где $A_{i,j}=K(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_{0j})$ – ядро интегрального ур. (3), $i,j\in 0...N$ – число точек дискретизации пластины.

Выражение (5) является некорректным алгебраическим уравнением. Поэтому, осуществляя слабый спектральный сдвиг [4, 6–8], получаем заряд в дискретном множестве точек (рис. 4):

$$\sigma=4\pi(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{E})^{-1}\mathbf{U}_0, \quad (6)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица; $\lambda=10^{-6}$ – параметр регуляризации [2, 4–6].

При выбранных числах дискретизации ошибка восстановления распределения зарядов в каждой точке пластины не превышала 10 %.

Приведём томографический метод расчёта емкости проводника в форме круглого кольца. Отношение внешнего радиуса кольца к внутреннему равно $a=R/r$. В осесимметричном случае преобразование Радона (1) преобразуется в преобразование Аббеля [4, 6, 8]

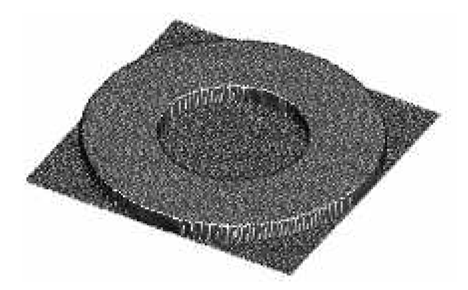
$$P(p,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x,y)\times$$
$$\times\delta(p-y\cdot\cos(\theta)+x\cdot\sin(\theta))dxdy\to \quad (1)$$
$$\to P(\rho)=2\int_{|\rho|}^{R}\frac{\sigma(r)rdr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

Интегрируя выражение (1) по углу, получим суммарное изображение – это есть распределение потенциала $U(\rho)=2\pi\cdot P(\rho)$ на поверхности плоского электрода, рис. 5.

Для вычисления заряда проводника будем использовать соотношение (2), которое в осесимметричном случае преобразуется в обратное преобразование Аббеля:

$$\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\infty}^{\infty}dp\cdot\frac{\partial P(\theta,p)/\partial p}{p-y\cdot\cos(\theta)+x\cdot\sin(\theta)}\to \quad (2)$$
$$\to\sigma(\rho)=-\frac{1}{2\pi^2}\int_{|\rho|}^{R}\frac{U'(r)dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

Теперь можно определить емкость проводника, используя известную формулу [1]:



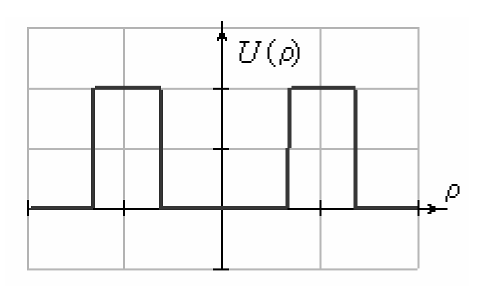
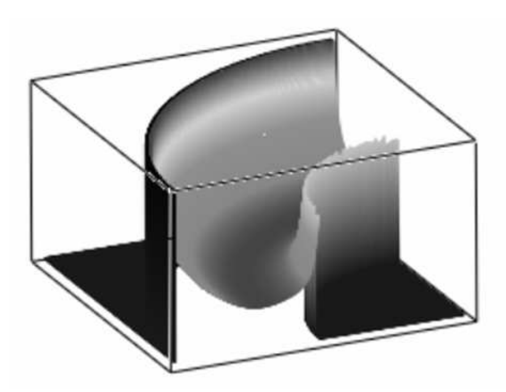


Рис. 5. Слева – распределение потенциала на поверхности проводника в форме круглого кольца, справа – его профиль



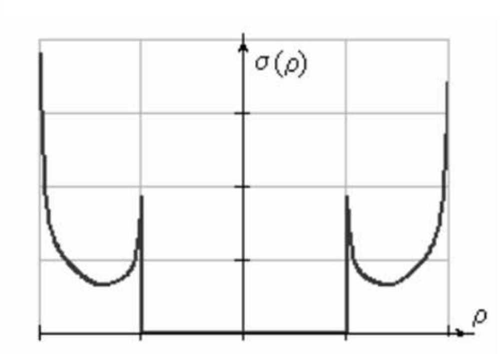


Рис. 6. *Слева – фрагмент распределения заряда на поверхности проводника в форме круглого кольца, справа – его профиль*

$$C = \frac{\iint\limits_D \sigma(x,y)dxdy}{U}, \quad \{x,y\} \in D. \qquad (5)$$

Для отношений величин внешнего и внутреннего радиусов кольца $a=R/r$, равного $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$, получены значения емкостей соответственно:

$$C1 = 7{,}822\varepsilon R, \quad C2 = 7{,}849\varepsilon R, \quad C3 = 7{,}872\varepsilon R.$$

Авторами были подсчитаны величины ёмкостей как канонических, так и неканонических форм. Приведём результаты расчетов ёмкостей различных пластин канонической формы на основе томографического подхода и сравним их с расчетами [1]. Геометрические размеры пластин показаны на рис. 5–8. После определения распределения зарядов на поверхности электродов томографическим методом, ёмкости пластин определялись по формуле (5).

Результаты проведённых расчётов ёмкостей представлены на рис. 7–10. На рисунках приведены верхние и нижние границы значений емкостей [1], а по центру проходят кривые, рассчитанные томографическим методом.

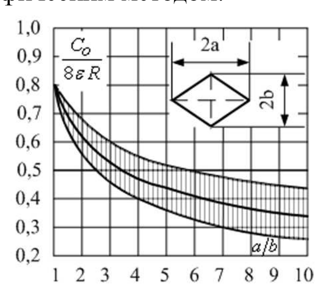


Рис. 7. *Емкость пластины в форме ромба*

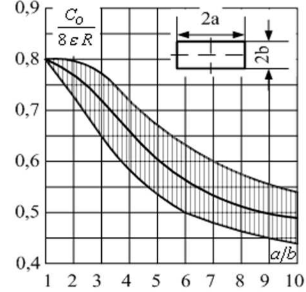


Рис. 8. *Емкость прямоугольной пластины*

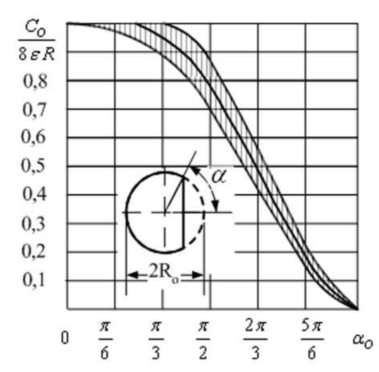


Рис. 9. *Емкость пластины в форме кругового сегмента*

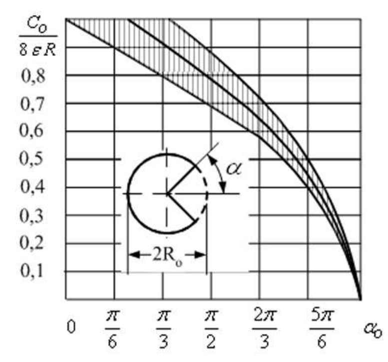
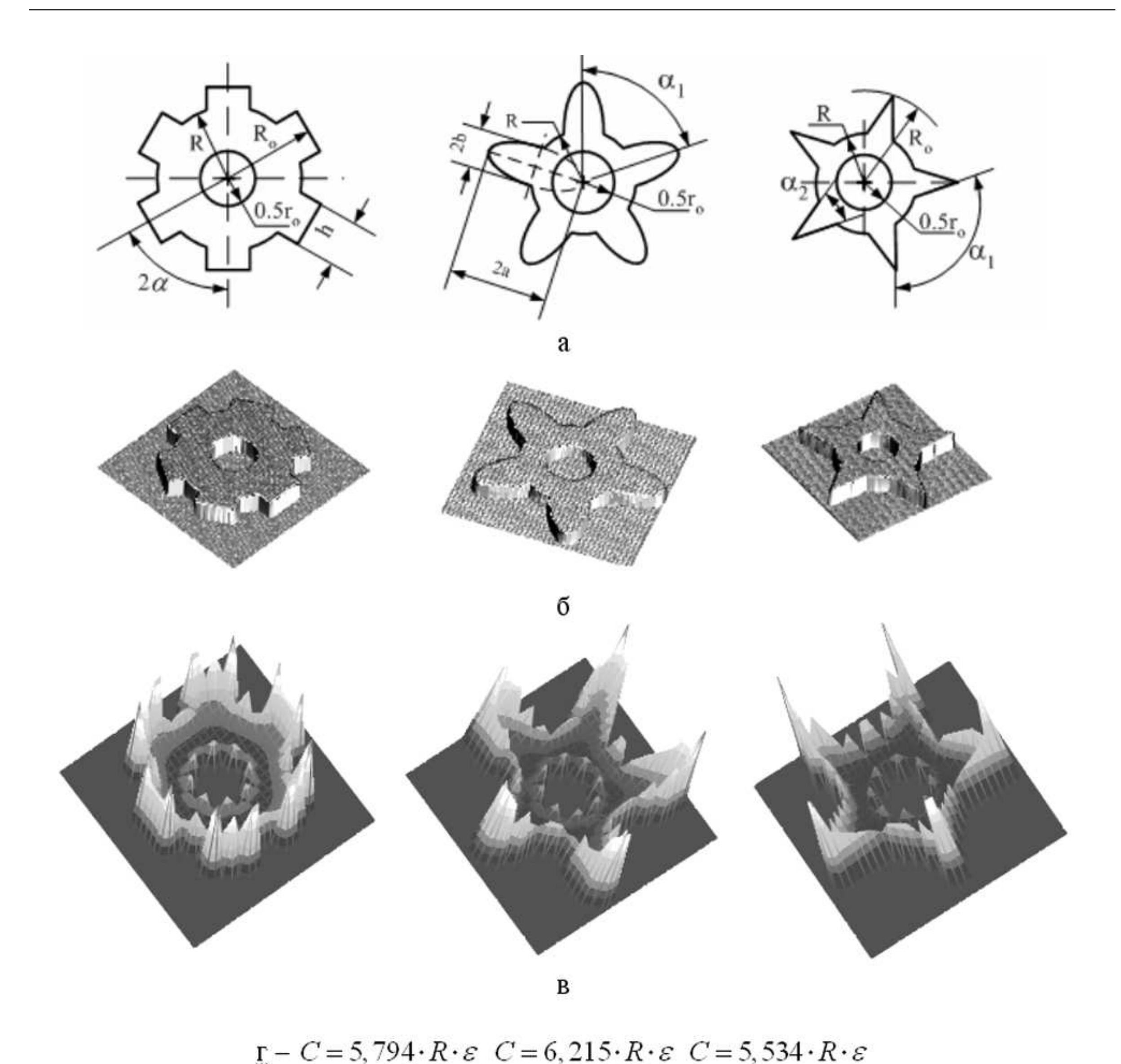


Рис. 10. *Емкость пластины в форме кругового сектора*

Результаты расчетов ёмкостей некоторых пластин неканонической формы на основе томографического подхода приведены на рис. 11. Распределение потенциала на поверхностях проводников – величина постоянная, она повторяет форму электродов (рис. 11, *б*), тогда как заряды на поверхности электродов распределены неравномерно (рис. 11, *в*).

Заключение

Разработан томографический метод расчета распределения зарядов на поверхности плоских проводников. При известном распределении зарядов можно реконструировать электростатические поля и вычислять ёмкости проводников любой формы. Преимущество томографического подхода заключается в возможности подсчитывать распределения зарядов, напряжённостей и емкостей проводников



г – $C = 5,794 \cdot R \cdot \varepsilon$ $C = 6,215 \cdot R \cdot \varepsilon$ $C = 5,534 \cdot R \cdot \varepsilon$

Рис. 11. *Результаты расчетов ёмкостей пластин неканонической формы: а) геометрические размеры, б) распределение потенциалов и в) зарядов на поверхностях, г) соответствующие величины ёмкостей проводников*

неканонической формы. Современный уровень развития компьютерной техники обеспечивает высокую точность расчетов. На основе предлагаемого подхода возможно решение обратной задачи методом реконструктивной томографии, т.е. определение конфигурации электродной системы для получения желаемого распределения зарядов и напряжённостей электростатического поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 288 с.
2. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Хохлова Т.Е. Определение параметров двухполюсника при воздействии импульсного напряжения // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 64–67.
3. Корнев Я.И., Исаев Ю.Н., Яворовский А.Н., Ушаков В.Я., Хасельберг М.Б., Колчанова В.А. Влияние распределение электрических полей в реакторе на эффективность электроразрядной обработки воды // Известия вузов. Физика. – 2004. – № 10. – С. 89–96.
4. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газовой динамике и физике плазмы. – Новосибирск: Наука, 1987. – 232 с.
5. Кравчук А.С. Основы компьютерной томографии. – М.: Дрофа, 2001. – 240 с.
6. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. – Новосибирск: Наука, 1982. – 238 с.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические методы компьютерной томографии. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1986. – 286 с.